Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Agrégation-modélisation **2005-2006**

Un modèle de file d'attente

Daniel Flipo

1. Présentation du modèle

Nous allons étudier une file d'attente à un serveur. Le flot d'arrivée des clients est un processus de Poisson de paramètre λ (il arrive un seul client à la fois). Les durées de service des différents clients sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, toutes indépendantes du processus des arrivées. La discipline de service est toujours premier arrivé, premier servi.

On rappelle les deux caractérisations du processus de Poisson : un processus de Poisson de paramètre λ peut donc être défini
- soit à partir de ses instants $(T_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de sauts (ici les arrivées des clients), en disant que la suite des $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ des intervalles [(1)] entre deux sauts consécutifs est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ ;
- soit à partir de sa fonction de comptage $N(t) = \sum_i \mathbf{1}_{0<T_i\le t}$ (ici le nombre de clients arrivés entre les instants 0 exclu et t inclus), en disant que $N(t)$ est à accroissements indépendants et que pour tout couple (t,s) de réels ($t \ge 0$, $s > 0$) l'accroissement $N(t+s) - N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λs.

Lorsque la loi de service est exponentielle, de paramètre μ, le nombre de clients présents — en attente ou en service — est un proccessus markovien de sauts. La théorie des proccessus markoviens de sauts montre que si $\lambda < \mu$ un régime d'équilibre s'établit [(2)] ; elle permet de calculer dans ce cas

1. On pose $T_0 = 0$.
2. Cette condition est intuitive : elle exprime que la durée moyenne d'un service $(1/\mu)$ est strictement inférieure à la durée moyenne $(1/\lambda)$ d'un intervalle interarrivées, ou encore que le nombre moyen λ de clients arrivant par unité de temps est strictement inférieur au nombre moyen μ de clients qu'il est possible de servir par unité de temps.

– la loi du nombre X_∞ de clients en attente en régime stationnaire :

$$\forall k \geq 0, \quad \mathbf{P}(X_\infty = k) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k,$$

– la loi du temps de réponse R_∞ (attente plus service) d'un client en régime stationnaire (R_∞ suit une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$) :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}(R_\infty \leq t) = \int_0^t (\mu - \lambda) e^{-(\mu-\lambda)x} \, dx.$$

On ne cherchera pas à établir les résultats ci-dessus, ils seront retrouvés au cours de l'étude qui suit.

2. Cas d'une loi de service quelconque

Lorsque la loi de service n'est pas exponentielle, le nombre X_t de personnes présentes dans le système au temps t n'est plus un processus de Markov. En effet le temps de service restant à fournir pour le client en cours de service dépend à priori du temps déjà passé à être servi (la loi exponentielle est la seule loi à densité possédant la propriété d'absence de mémoire). On ne peut donc plus utiliser les techniques des processus markoviens de sauts. Le fait que les arrivées soient un processus de Poisson va cependant nous permettre d'utiliser une technique markovienne. Nous allons mettre en évidence une chaîne de Markov incluse dans le processus, il s'agit du nombre de personnes présentes dans le système aux instants de sortie de chaque client.

Soient $(S_n)_{n\geq 1}$ les instants de sorties des clients. Appelons Y_n le nombre X_{S_n} de clients présents à l'instant S_n ou encore *juste après* (3) l'instant S_n.

Proposition 1. — *La suite* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *des nombres de clients présents dans le système aux instants de fin de service est une chaîne de Markov à valeurs dans* $\mathbf{N}$.

Idée de peuve. — Appelons K_n le nombre de clients arrivés pendant le service du n-ième client. On a la relation :

(1)
$$Y_{n+1} = Y_n - \mathbf{1}_{Y_n > 0} + K_{n+1}$$

en posant Y_0 égale à 0. On en déduit que (Y_n) est une chaîne de Markov. □

3. Les trajectoires du processus X_t sont continues à droite, donc $X_{S_n} = X_{S_n^+}$.

Suggestion 1 : compléter la démonstration ci-dessus.

La loi de K_n, lorsque le temps de service σ_n du n-ième client vaut t, est une loi de Poisson de paramètre λt (loi conditionnelle sachant $\sigma_n = t$). La loi de K_n s'obtient en intégrant cette loi conditionnelle par rapport à la loi de σ :

$$q_k = \mathbf{P}(K_n = k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, d\mathbf{P}_\sigma(t) \tag{2}$$

avec $\mathbf{P}_\sigma$ loi de service. La chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a comme matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & q_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Comme tous les q_k sont strictement positifs, il est clair que cette chaîne est irréductible sur $\mathbf{N}$ et apériodique.

Sauf au point 0, cette chaîne est identique à la marche aléatoire définie par $Z_{n+1} = Z_n + (K_{n+1} - 1)$ et $Z_0 = 0$, où les (K_n) sont indépendantes. Les propriétés des marches aléatoires sur $\mathbf{Z}$ sont bien connues. Si la moyenne de la loi des sauts ($\mathbf{E}(K_n - 1)$ ici) est nulle, la marche est récurrente nulle. Si la moyenne est strictement positive, la marche est transiente et tend vers $+\infty$. Si la moyenne est strictement négative, la marche est transiente et tend vers $-\infty$.

Suggestion 2 : montrer que $\mathbf{E}(K_n) = \lambda\,\mathbf{E}(\sigma)$ et démontrer la proposition suivante en comparant les suites (Y_n) et (Z_n).

Proposition 2. — *La chaîne de Markov* $(Y_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *est récurrente si* $\mathbf{E}(\sigma) \leq 1/\lambda$ *et transiente dans le cas contraire.*

On pose $\rho = \lambda\,\mathbf{E}(\sigma)$ (quotient des temps moyens de service et d'interarrivée), la condition de la proposition précédente s'écrit $\rho \leq 1$.

Si $\rho \leq 1$, la chaîne (Y_n) est récurrente, elle admet donc une mesure invariante π, unique à une constante multiplicative près. L'équation d'invariance s'écrit :

$$
(3)\qquad
\begin{array}{lllllll}
\pi_0 = \pi_1 q_0 & +\pi_0 q_0 & & & & & \\
\pi_1 = \pi_2 q_0 & +\pi_1 q_1 & +\pi_0 q_1 & & & & \\
\pi_2 = \pi_3 q_0 & +\pi_2 q_1 & +\pi_1 q_2 & +\pi_0 q_2 & & & \\
\vdots = \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
\pi_k = \pi_{k+1} q_0 & +\pi_k q_1 & +\pi_{k-1} q_2 & +\cdots & +\pi_1 q_k & +\pi_0 q_k &
\end{array}
$$

Il est possible de calculer la fonction génératrice g de la mesure invariante π ($g(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} s^k \pi_k$) en fonction de celle de la loi des K_n, $h(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} s^k q_k$. En multipliant la k-ième équation du système (3) par s^{k+1} et en sommant en diagonale, on obtient

$$
g(s) = \frac{h(s)(s-1)}{s-h(s)}\,\pi_0. \tag{4}
$$

Suggestion 3 : préciser le calcul ci-dessus et établir le résultat suivant en faisant tendre s vers 1 dans la formule (4).

Proposition 3. — *La chaîne de Markov* $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *admet une probabilité invariante si et seulement si* $\rho < 1$. *La fonction génératrice de cette probabilité invariante est donnée par :*

$$
g(s) = \frac{h(s)(s-1)}{s-h(s)}\,(1-\rho). \tag{5}
$$

Suggestion 4 : déduire de (5) que si σ est de carré intégrable, le nombre moyen de clients présents aux instants de départ vaut en régime stationnaire

$$
\mathbf{E}(Y_\infty) = \rho + \frac{\lambda^2\,\mathbf{E}(\sigma^2)}{2(1-\rho)}\cdot
$$

On pourra chercher un développement limité à l'ordre 2 de h au voisinage de $s=1$ et en déduire un développement limité à l'ordre 1 de g.

La théorie des processus de renouvellement permet de montrer que le comportement du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est le même que celui de la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$. Dans le cas stationnaire, le processus a la même loi invariante que la chaîne.

La fonction génératrice h des (K_n), qui intervient dans l'expression de g, n'étant pas une donnée du problème, il est intéressant de remarquer que h

s'exprime facilement en fonction de la transformée de Laplace $\mathscr{L}_\sigma$ de la loi des services (utiliser (2) et permuter somme et intégrale) :

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(1-s)t}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_\sigma(t) = \mathscr{L}_\sigma(\lambda - \lambda s). \tag{6}$$

Finalement, lorsque $\rho < 1$, la fonction génératrice de la loi invariante s'écrit :

$$g(s) = \frac{(s-1)\mathscr{L}_\sigma(\lambda - \lambda s)}{s - \mathscr{L}_\sigma(\lambda - \lambda s)}\,(1-\rho). \tag{7}$$

Suggestion 5 : retrouver à partir de (7) la loi de Y_∞ lorsque la loi des services est exponentielle de paramètre μ avec $\lambda < \mu$.

Cherchons maintenant à identifier le temps de séjour moyen R_∞ (attente plus service) d'un client en régime stationnaire. Les personnes présentes dans le système au départ d'un client sont celles qui sont arrivées durant son temps de séjour, donc si ce temps de séjour vaut t, le nombre de clients arrivés pendant ce temps suit une loi de Poisson de paramètre λt et on peut écrire :

$$\mathbf{P}(\mathrm{Y}_\infty = k) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathrm{R}_\infty}(t). \tag{8}$$

En multipliant (8) par k et en sommant sur k, on obtient $\mathbf{E}(\mathrm{Y}_\infty) = \lambda\,\mathbf{E}(\mathrm{R}_\infty)$ (formule de Little).

Suggestion 6 : En multipliant (8) par s^k et en sommant sur k, montrer que la transformée de Laplace de la loi du temps R_∞ passé par un client dans le système en régime stationnaire s'exprime simplement en fonction de la transformée de Laplace de la loi du temps de service σ :

$$\mathscr{L}_{\mathrm{R}_\infty}(z) = \frac{(1-\rho)\,z\mathscr{L}_\sigma(z)}{z + \lambda\mathscr{L}_\sigma(z) - \lambda}. \tag{9}$$

Retrouver la loi de R_∞ dans le cas où la loi des services est exponentielle de paramètre μ avec $\lambda < \mu$.

Suggestion 7 : Choisir une loi pour la durée des services (constante, uniforme sur $[a,b]$ avec $a \geq 0$), exponentielle, etc.) et simuler un échantillon de v.a. suivant cette loi à l'aide de Scilab. Construire une trajectoire de la suite (Y_n) à partir de (1) (lorsqu'on connaît la valeur de σ_n, il est facile de simuler K_n). On pourra faire afficher, cette trajectoire dans le cas $\rho \geq 1$, ou l'histogramme des valeurs de la suite (Y_n) (dans le cas $\rho < 1$). Comment interprétez-vous cet histogramme dans le cas $\rho < 1$?

Janvier 2006

Daniel Flipo